4/3/19

Τυπική Μορφή Π.Γ.Π

1) Είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης
2) όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη αρνητικούς σταθερούς όρους
3) όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές

$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$

$\vdots$

$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

$b_1, b_2, \dots, b_n > 0$

$\max c'x$

$Ax = b$

$x \geq 0 \quad b > 0$

Π.χ

$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

$x_1 + x_2 = 10$

$-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -5$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$

$x_1 \in \mathbb{R} \quad x_2 > 0 \quad x_3 \leq 0$

$-\max -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$

$x_1 + x_2 = 10$

$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \geq 5$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 6$

$x_1 \in \mathbb{R} \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 < 0$

$-\max -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$

$x_1 + x_2 = 10$

$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 5$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 = 6$

$x_1 \in \mathbb{R} \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$

$x_4, x_5 > 0$

Ορίζω x_1' και x_1'' , $x_1', x_1'' \geq 0$

$x_1 = x_1' - x_1''$ και $x_3 = -x_3'$

Άρα έχω: $-\max -2(x_1' - x_1'') - 3x_2 - 5x_3'$

$$x_1' - x_1'' + x_2 = 10$$

$$2(x_1' - x_1'') - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 5$$

$$7(x_1' - x_1'') - 4x_2 - x_3' + x_5 = 6$$

$$x_1', x_1'', x_2, x_3', x_4, x_5 \geq 0$$

Παράδειγμα 2

$\min: x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq -50$$

$$x_2 + x_3 \geq 25$$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_3 \in \mathbb{R}$

$-\max -x_1 - 2x_2 - 3x_3$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 30$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 50$$

$$x_2 + x_3 \geq 25$$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3 \in \mathbb{R}$

$-\max -x_1 - 2x_2 - 3x_3$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40$

$x_1 - x_2 + x_3 = 30$

$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 50$

$x_2 + x_3 - x_6 = 25$

$x_1, x_2 > 0$, $x_3 \in \mathbb{R}$ $x_4, x_5, x_6 \geq 0$

$-\max -x_1 - 2x_2 - 3(x_3' - x_3'')$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 40$

$x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' = 30$

$-x_1 + 3x_2 + 2(x_3' - x_3'') + x_5 = 50$

$x_2 + x_3' - x_3'' - x_6 = 25$

$x_1, x_2, x_3', x_3''; x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Εστω $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^m$

$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ γραμμικα ανεξαρτητα

$r(A)$ βαθμιδα πινακα A

A $m \times n$

$Ax = b$ υποθετουμε οτι $r(A) = m < n$

$A = [P_1, P_2, \ldots, P_n]$ επιλεγουμε m γραμμικα ανεξαρτητες στηλες του πινακα A

$\max \quad 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_i \geq 0$$

1) ~~[illegible]~~

$B = [P_3, P_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = x_2 = 0$

$x_3 + x_4 = 5$

$2x_3 = 1 \qquad x_B = \left(x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = \frac{9}{2}\right)'$

2) $x_1 = x_3 = 0 \qquad x_B = \left(x_1 = 1,\ x_4 = 6\right)'$

3) $x_1 = x_4 = 0 \qquad x_B = \left(x_2 = -3,\ x_3 = 2\right)'$

4) $x_2 = x_3 = 0 \qquad x_B = \left(x_1 = \frac{1}{2},\ x_4 = \frac{9}{2}\right)'$

5) $x_2 = x_4 = 0 \qquad B = (P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

6) $x_3 = x_4 = 0 \qquad x_B = \left(x_1 = 2,\ x_2 = -3\right)'$

$Ax = b \qquad [B, N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \underline{b}$

$Bx_B + Nx_N = b$

$x_B = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}N\,\underline{x_N} \qquad (x_N = 0)$

$x_B = B^{-1}\underline{b}$

$\binom{n}{m}$

Κάθε βασική λύση με όλες τις μεταβλητές της μη αρνητικές ονομάζεται βασική εφικτή λύση (β.ε.λ)

Μια βασική λύση που έχει μια τουλάχιστον από τις βασικές μεταβλητές της ίση με μηδέν λέγεται εκφυλισμένη β.ε.λ

$A\underline{x} = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{P_1} x_1 + \underline{P_2} x_2 + \underline{P_3} x_3 + \underline{P_4} x_4 = \underline{b}$

$B = (\underline{P_3}, \underline{P_4})$

$x_B = B^{-1}\underline{b} = (\underline{P_3}, \underline{P_4})^{-1}\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

Έστω Π.Γ.Π $\max c'x$ με εφικτή περιοχή $F \neq \emptyset$

$A\underline{x} = b$

$\underline{x}, \underline{b} \geq 0$

Αν το F είναι φραγμένο σύνολο τότε το Π.Γ.Π έχει άριστη λύση

F κλειστό σύνολο

x_n, $n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία σημείων του F $\lim \underline{x_n} = \underline{x}$

$\underline{x_n} > 0$ $\lim \underline{x_n} > 0 \Rightarrow \underline{x} \geq 0$

$A x_n = b \Rightarrow \lim A\underline{x_n} = \underline{b} \Rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$

F κλειστό φραγμένο

- Κυρτός συνδυασμός των σημείων $\underline{x_1}, \underline{x_2}, \ldots, \underline{x_k} \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται
  $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ $\quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$

- Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν $\forall\, \underline{x_1}, \underline{x_2} \in K$ $0 \leq \lambda \leq 1$
  $\lambda \underline{x_1} + (1-\lambda)\underline{x_2} \in K$

* Ακρότατο σημείο ενός κυρτού συνόλου K είναι κάθε σημείο $\underline{x}$ του K τέτοιο ώστε δεν υπάρχουν $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in K$ $0<\lambda<1$ έτσι ώστε $\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2$

* Κυρτό πολύεδρο του $\mathbb{R}^n$: $\{ x \in \mathbb{R}^n \;\; \underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \; , \lambda_i > 0 \;\; \sum_{i=1} \lambda_i = 1 \}$

* Τα ακρότατα σημεία ενός κυρτού πολυέδρου όπου είναι πεπερασμένα σε πλήθος τα λέμε κορυφές

* Υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο των σημείων $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$
$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = b$ (1) , α, b σταθερές

Ημιεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ για $<, >$ στην (1)

—

Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό σύνολο

Απόδειξη

$x_1, x_2 \in F$ θα πρέπει $\lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2 \in F$, $\lambda > 0$
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ $\quad \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2 \geq \underline{0}$

$A(\lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2) = \lambda A \underline{x}_1 + (1-\lambda) A \underline{x}_2 = \lambda \underline{b} + (1-\lambda)\underline{b} = \underline{b}$

—

Αν η εφικτή περιοχή είναι φραγμένο σύνολο τότε η άριστη λύση πετυχαίνεται σε ακρότατο σημείο (κορυφή) της f

F πολύεδρο με πεπερασμένο αριθμό κορυφών $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$
Το μέγιστο πετυχαίνεται στο $\underline{x}^* \in F$
$\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad \sum \lambda_i = 1 \; , \lambda_i \geq 0 \quad x_i$ κορυφές

$f(\underline{x}^*) = \underline{c}' \underline{x}^* = \underline{c}' \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{c}' \underline{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\underline{x}_i) \leq \sum \lambda_i f(\underline{x}_p) = f(\underline{x}_p)$ όπου $f(\underline{x}_p) = \max f(\underline{x}_i)$

$f(\underline{x}^*) \leq f(x_p)$ $\quad \underline{x}^* = x_p$

$f(\underline{x}^*) \geq f(x_p)$

Αν δυο ή περισσοτερες κορυφες ειναι αριστες λυσεις τοτε και καθε κυρτός συνδιασμός της ειναι αριστη λυση

x_1, x_2, x_r αριστες λυσεις

$z = \max c'x \equiv f(x_i) \quad i=1,\ldots,r$

$\underline{x} = \sum_{i=1} \lambda_i x_i \quad \sum \lambda_i = 1 \quad \lambda_i > 0$

$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i z = z$

Αν $\underline{x}$ ειναι βασικη εφικτη λυση τοτε $\underline{x}$ ειναι κορυφη της F

Απόδειξη

Αφου $\underline{x}$ ειναι βεσ θα εχει το πολύ κ θετικες συντεταγμενες εστω ότι ειναι οι κ πρωτες $(k \leq m)$

$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots x_k, 0, \ldots 0)'$

$\underline{P}_1\ \underline{P}_2\ \ldots\ \underline{P}_k$ γραμ. ανεξαρτητες (στηλες του A)

Αν δεν ειναι κορυφη της F $\exists\, x_1 \neq x_2 \in F \quad 0<\lambda<1$

$\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2$

$x_1 = \lambda x_{11} + (1-\lambda) x_{12}$

$\vdots$

$x_k = \lambda x_{k1} + (1-\lambda) x_{k2}$

$0 = \lambda x_{k+1\,1} + (1-\lambda) x_{k+1\,2}$

$\vdots$

$0 = \lambda x_{n1} + (1-\lambda) x_{n2}$ $\qquad \underline{x}_1, \underline{x}_2 \geq 0$

$0 < \lambda < 1$

(*) Οι 2 τελευταίες έχουν μηδ. δείκτες

$\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in F$

$A\underline{x}_1 = b \qquad \sum_{j=1}^{k} x_{j1} P_j = \underline{b}$

$A\underline{x}_2 = b \qquad \sum_{j=1}^{k} x_{j2} \underline{P}_j = \underline{b}$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} (x_{j1} - x_{j2}) P_j = 0 \Rightarrow$

$x_{j1} = x_{j2}$ Άτοπο γιατί $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$

$\underline{x_1 = x_2}$ Άρα $\underline{x}$ κορυφή της F

<u>Αντίστροφα</u>

Έστω ότι οι θετικές συντεταγμένες της κορυφής $\underline{x}$ είναι k πρώτες

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots 0)' \quad k < n$

να δείξατε $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_k$ γραμ. ανεξαρτ.

Έστω ότι είναι γραμ. εξαρτημένες

$\exists\, d_1, d_2, \dots, d_k$

$\partial(d_1 P_1 + \dots + d_n P_n) = 0 \qquad , \partial \in \mathbb{R}$

$\underline{x} \in F$

$x_1 \underline{P}_1 + \dots + x_k \underline{P}_k = \underline{b}$

$(x_1 + \partial d_1)\underline{P}_1 + \dots + (x_k + \partial d_k)\underline{P}_k = \underline{b}$

$(x_1 - \partial d_1)\underline{P}_1 + \dots + (x_k - \partial d_k)\underline{P}_k = \underline{b}$

$\underline{x}_1 = (x_1 + \partial d_1, x_2 + \partial d_2, \dots, x_k + \partial d_k, 0, \dots, 0)'$

$\underline{x}_2 = (x_1 - \partial d_1, x_2 - \partial d_2, \dots, x_k - \partial d_k, 0, \dots, 0)'$

$x_1 + \partial d_1 \geq 0 \qquad \underline{x} = \frac{1}{2}\underline{x}_1 + \frac{1}{2}\underline{x}_2$ <u>Άτοπο</u> γιατί $\underline{x}$ κορυφή

$x_1 - \partial d_1 \geq 0$

Φυλλάδιο 3

1. Ένα αεροπλάνο έχει τρία τμήματα για τη μεταφορά φορτίου μπροστά, στο κέντρο και στην ουρά. Αυτά τα τμήματα έχουν τους ακόλουθους περιορισμούς ως προς το βάρος και τον όγκο του μεταφερόμενου φορτίου:

ΤΜΗΜΑ	ΒΑΡΟΣ (ΤΟΝΟΙ)	ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ (M^3)
μπροστά	10	6800
κέντρο	16	8700
ουρά	8	5300

Επιπλέον ποσοστό του βάρους πρέπει να είναι το ίδιο στα τρία τμήματα για να διατηρείται η ισορροπία του αεροπλάνου. Τα παρακάτω φορτία πρέπει να μεταφερθούν στην επόμενη πτήση:

ΦΟΡΤΙΟ	ΒΑΡΟΣ (ΤΟΝΟΙ)	ΌΓΚΟΣ (M^3)	ΚΕΡΔΟΣ (€/ΤΟΝΟ)
C1	18	480	310
C2	15	650	380
C3	23	580	350
C4	12	390	285

Να διατυπωθεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π) για τη φόρτωση του αεροπλάνου που μεγιστοποιεί το κέρδος της πτήσης

2. Ο υπεύθυνος της επιτροπής αγώνα κατά της ρύπανσης μιας λίμνης έχει για κύριο έργο του τον έλεγχο του περιορισμού των τοξικών ουσιών που ρυπαίνουν τη λίμνη, στα ανεκτά όρια που προβλέπει ο νομοθέτης. Τρεις βιομηχανικές μονάδες πετούν τα απόβλητά τους στη λίμνη. Αυτά τα απόβλητα περιέχουν χημικές ουσίες ιδιαίτερα επικίνδυνες, όπως άλατα μόλυβδου (Pb), υδραργύρου (Hg) και μαγγανίου (Mn). Για τον περιορισμό της ρύπανσης στα ανεκτά επίπεδα, διατίθενται δύο είδη προϊόντων (ακίνδυνα για την υγεία), το ένα βασισμένο σε θειικά άλατα, το δεύτερο βασισμένο σε νιτρικά άλατα. Τα προϊόντα αυτά αντιδρούν με τις παραπάνω τοξικές ουσίες παράγοντας τελείως ακίνδυνα ιζήματα. Το πρόβλημα που θέτει η επιτροπή αγώνα, επικεντρώνεται στον υπολογισμό εκείνου του συνδυασμού θειικών και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιεί το κόστος προστασίας ενώ παράλληλα, επιτρέπει την ικανοποίηση των οικολογικών περιορισμών. Ο υπεύθυνος της επιτροπής που αντιμετωπίζει το πρόβλημα διαθέτει τα εξής παρακάτω στοιχεία:

α) Την ποσότητα αποβλήτων και την περιεκτικότητα τους σε τοξικές ουσίες για κάθε βιομηχανία που δίνονται στον πίνακα

	Όγκος και περιεκτικότητα αποβλήτων			
	Όγκος Αποβλήτων (m^3)	Συγκέντρωση (g/m^3)		
Βιομηχανική Μονάδα		Pb	Hg	Mn
1	1000	1.00	2.50	0.70
2	3000	0.50	0.50	1.00
3	1200	1.25	1.00	0.50

β) Την ικανότητα εξουδετέρωσης των αλάτων:

- 1 βαρέλι θειικού άλατος εξουδετερώνει 3 κιλά αλάτων μολύβδου, 2 κιλά αλάτων υδραργύρου και 20 κιλά αλάτων μαγγανίου,
- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος εξουδετερώνει 5 κιλά αλάτων μολύβδου, 12.5 κιλά αλάτων υδραργύρου και 3 κιλά αλάτων μαγγανίου.

γ) Τους οικολογικοί περιορισμούς:

Οι μέγιστες ποσότητες τοξικών ουσιών στα νερά, που επιτρέπει η νομοθεσία μετά την εφαρμογή μέτρων κατά της μόλυνσης, είναι:

- άλας μολύβδου: 1 κιλό
- άλας υδραργύρου: 0.2 κιλά
- άλας μαγγανίου: 1.3 κιλά

Υποτίθεται ότι η φύση καταστρέφει από μόνη της καθημερινά αυτές τις ποσότητες, δεν μπορεί όμως να καταστρέψει περισσότερο.

δ) Το κόστος προϊόντων εξουδετέρωσης

- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος κοστίζει 3000 χρηματικές μονάδες (χ.μ)
- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος κοστίζει 3000 (χ.μ)

Το πρόβλημα της επιτροπής συνίσταται στην εναλλακτική επιλογή θειικών ή/ και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιούν το κόστος προστασίας της λίμνης

3. Από μια εταιρεία κατασκευής χαρτιού ζητήθηκε η παραγωγή χαρτιού σε ρολό μήκους 150 cm και πλάτους 1.5, 2.5 και 3.5 cm. Τα μηχανήματα όμως της εταιρεία μπορούν να παράγουν ρολά χαρτιού οποιουδήποτε μήκους αλλά πλάτους αποκλειστικά 10 cm και συνεπώς η εταιρεία πρέπει να κόψει τα παραγόμενα ρολά στις ζητούμενες προδιαγραφές (πλάτους)

Α. Αν οι ελάχιστες απαιτήσεις της αγοράς ανέρχονται σε 1000 ρολά πλάτους 1.5 cm, 2000 ρολά πλάτους 2.5 cm και 4000 ρολά πλάτους 3.5 cm υποδείξτε ένα π.γ.π για την εύρεση του συνολικού αριθμού ρολών χαρτιού που πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε οι απώλειες σε χαρτί της εταιρείας να είναι οι ελάχιστες δυνατές

Β. Τι αλλάζει αν το ενδιαφέρον της εταιρείας επικεντρωθεί μόνο στην εύρεση του ελάχιστου δυνατού συνολικού αριθμού ρολών χάρτου που πρέπει να παραχθεί (κάτω από τις ίδιες απαιτήσεις της αγοράς); Δώστε το νέο π.γ.π

4. Μια τεχνική εταιρεία που πρέπει να παραδώσει ένα μεγάλο δημόσιο έργο μέσα στα επόμενα δύο χρόνια, χρειάζεται 200 επιπλέον φορτηγά. Τα φορτηγά αυτά, είτε θα τα αγοράσει πληρώνοντας 140 χρηματικές μονάδες ανά φορτηγό, είτε θα τα νοικιάσει με ετήσιο κόστος 80 χ.μ. ανά φορτηγό. Τα χρήματα για την αγορά των φορτηγών θα πρέπει να καταβληθούν με την έναρξη του έργου αλλά αυτά της ενοικίασής τους σε δύο δόσεις (στην αρχή της κάθε χρονιάς). Ξεκινώντας το έργο, η εταιρεία έχει στη διάθεσή της για αγορά και/ή ενοικίαση φορτηγών ένα ποσό ύψους 8000 χ.μ. Επιπλέον, μπορεί να εκμεταλλευτεί τη δυνατότητα δανεισμού που εξασφάλισε: ετήσιο δάνειο μέχρις 20000 χ.μ. με τόκο 16% αλλά με την υποχρέωση αποπληρωμής του στο τέλος της χρονιάς. Τα ετήσια κέρδη για την εταιρεία από το κάθε φορτηγό, εκτιμήθηκαν στις 120 χ.μ. και χρησιμοποιούνται αποκλειστικά στη διαδικασία ενοικίασης φορτηγών και εξόφλησης του δανείου που πάρθηκε. Να υποδειχθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση του τρόπου προμήθειας των φορτηγών, ο οποίος να ελαχιστοποιεί το συνολικό τους κόστος.

5. Δίνεται το πρόβλημα

$$\max -x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}$$
$$x_1+2x_2 \geq 4$$
$$2x_1-2x_2 \leq 2$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_2, x_2 \geq 0$$

1. Να βρείτε γραφικά τον χώρο των εφικτών λύσεων και τις κορυφές του, σχεδιάζοντας τις ευθείες των περιορισμών.
2. Να βρείτε με αλγεβρικό τρόπο το **πολύ δυο** από τις κορυφές του συνόλου των εφικτών λύσεων του προβλήματος, διατυπώνοντας με προσοχή την διαδικασία που θα ακολουθήσετε. Να πάρετε τις προβολές των κορυφών αυτών στο επίπεδο x_1, x_2 (θα ταυτισθούν με κάποια από τα σημεία που έχετε βρει στο ερώτημα 1). Να εντοπίσετε τα ζεύγη των ευθειών των περιορισμών, που σαν τομές τους προκύπτουν οι προβολές, στο επίπεδο x_1, x_2, των κορυφών που έχετε βρει. Αν στην προσπάθειά σας να βρείτε τις δυο κορυφές με αλγεβρικό τρόπο βρείτε κάποια λύση που **δεν είναι βασική εφικτή**, για αυτή την λύση πάρτε την προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 και στην συνέχεια προσπαθήστε να εντοπίσετε τις δυο ευθείες που ορίζουν αυτό το σημείο ως τομή. Που περιμένετε να τέμνονται αυτές οι ευθείες; Μέσα στο χώρο των εφικτών λύσεων ή έξω από αυτόν; Αντίστροφα από την γραφική παράσταση που θα κάνετε στο ερώτημα 1, να εντοπίσετε δυο ευθείες περιορισμών που τέμνονται σε σημείο έξω από τον χώρο των εφικτών λύσεων. Μετά προσπαθήστε να βρείτε τη βασική λύση που η προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο. Ελέγξτε τις συντεταγμένες αυτής της βασική λύσης. Θα διαπιστώσετε ότι αυτή η λύση δεν είναι εφικτή. Συσχετίστε την θέση της προβολής, με το γεγονός ότι η λύση δεν είναι εφικτή.
3. Να βρείτε γραφικά την λύση μεγίστου καθώς και το μέγιστο που ζητείται. Δικαιολογείστε με προσοχή την πορεία με αναφορά στο θετικό και αρνητικό ημιεπίπεδο στο οποίο κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο.
4. Ποιες είναι οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου στη βέλτιστη λύση. Ποιοι περιορισμοί είναι ενεργοί και ποιοι όχι στη βέλτιστη λύση.
5. Ποια είναι η λύση και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αν στον περιορισμό (3) θέσουμε 6 αντί 3. (Η απάντηση να δοθεί με γραφική επίλυση)
6. Χρησιμοποιώντας την απάντηση στη ερώτηση (5) να βρείτε, πάλι γραφικά, την αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης αν το 3 αντικατασταθεί με το 4, 5, 6. Μπορείτε βασιζόμενοι μόνο στην απάντηση σε αυτό το ερώτημα να συμπεράνετε αναλογική αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυξήσεις του συντελεστή b_3; (Αυτή η αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης όταν αυξάνεται κατά μία μονάδα ο πόρος b_3 λέγεται δυϊκή τιμή (Dual price) του πόρου 3)